



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**NOCIONES BÁSICAS POSTULADOS
– CONJUNTOS CONVEXOS Y
ÁNGULOS**

**CICLO
PRE
2024-1**



INTRODUCCIÓN

¿Qué es la geometría?

La geometría, es la rama de las Matemáticas que tiene por objeto el estudio de las figuras geométricas.

¿Qué es una figura geométrica?

Se denomina figura geométrica, a cualquier conjunto no vacío de puntos del espacio.

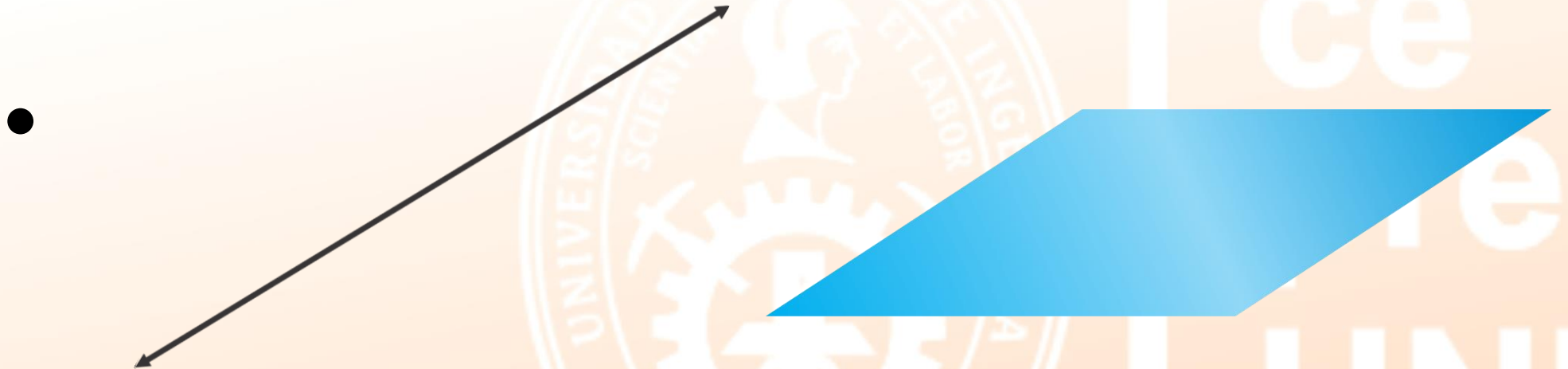
¿Qué es el espacio?

Se considera al espacio, como el conjunto de todos los puntos.

CONCEPTOS PRIMITIVOS

Son los primeros elementos que se dan en la teoría, por esta razón no se pueden definir.

Los elementos no definidos de la geometría son: el punto, la recta y el plano.



PROPOSICIONES

Son enunciados que tienen valor de verdad.

Las proposiciones son de dos tipos:

- **Postulados o Axiomas**

Son las proposiciones que se aceptan sin demostración.

- **Teoremas**

Los teoremas son las proposiciones que necesitan ser demostradas.

DEFINICIÓN

Tenemos un conjunto no vacío E , a cuyos elementos les llamaremos puntos. En E se distinguen dos familias de subconjuntos no vacíos, la familia de las rectas y la familia de los planos.

E , es el conjunto formado por todos los puntos y se denomina espacio.

Éste es nuestro conjunto universal.

EJERCICIO 01

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. El punto, la recta y el plano son conceptos primitivos.
- II. Se denomina figura geométrica, a cualquier conjunto no vacío de puntos del espacio.
- III. El postulado o axioma, es una proposición que se aceptan sin demostración.

A) VVF
D) FFV

B) VFV
E) VVV

C) FFF

RESOLUCIÓN 01

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. El punto, la recta y el plano son conceptos primitivos.
- II. Se denomina figura geométrica, a cualquier conjunto no vacío de puntos del espacio.
- III. El postulado o axioma, son proposiciones que se aceptan sin demostración.

I. **VERDADERA**

Son los primeros elementos.

II. **VERDADERA**

Por definición

III. **VERDADERA**

Por el postulado

Clave: E



ce
pre
UNI

CICLO
2024-1

Geometría

POSTULADOS Y DEFINICIONES



POSTULADO DE LA RECTA

Dados dos puntos arbitrarios, existe una recta y solamente una, que los contiene.

NOTACIÓN: $\overleftrightarrow{PQ}$, se lee recta PQ.

También se puede denotar con una letra L.



$$L = \overleftrightarrow{PQ}$$

TEOREMA

La intersección de dos rectas diferentes es el vacío o un punto.

Demostración

- Dadas las rectas diferentes L_1 y L_2 , supongamos que se intersecan en dos puntos P y Q , entonces

$$L_1 = \overleftrightarrow{PQ} \text{ y } L_2 = \overleftrightarrow{PQ}$$

- De esta última igualdad se obtiene $L_1 = L_2$
- Esto contradice la condición del teorema por lo tanto la intersección de dos rectas diferentes es un punto o en el vacío.

POSTULADO DE LA DISTANCIA

A cada par de puntos diferentes, le corresponde un número positivo único que se denomina, distancia entre los dos puntos.

Si los puntos son P y Q, entonces la distancia entre P y Q es denotada como PQ.

Si P y Q son el mismo punto, entonces $PQ = 0$.

POSTULADO DE LA REGLA

Sean P_0 y Q_0 dos puntos diferentes de una recta L , entonces existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de L y los números reales tal que:

- Al punto P_0 le corresponde el número real 0 y a Q_0 , el número real 1.
- Si al punto P le corresponde el número real x y a Q el número real y , entonces: $PQ = |x - y|$.



DEFINICIÓN

Un sistema de coordenadas unidimensional es una correspondencia, como la descrita en el postulado anterior.

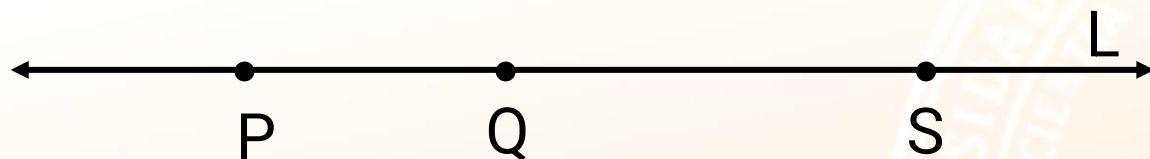
El punto P_0 es el origen del sistema de coordenadas.



La coordenada de un punto es el número real que le corresponde.

DEFINICIÓN

Sean P, Q y S tres puntos diferentes de una recta L. El punto Q está entre P y S si y solo si $PS = PQ + QS$.



NOTACIÓN: $P - Q - S$

Se lee Q está entre P y S.

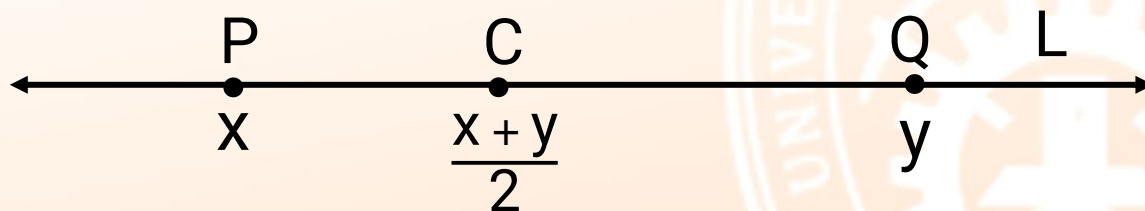
TEOREMA

Si P y Q son dos puntos diferentes de la recta L, entonces existe un punto C de la recta, tal que C está entre P y Q.

Demostración:

- Sean x e y las coordenadas de P y Q respectivamente.

Supongamos que $x < y$. El número $\frac{x+y}{2}$ es tal que $x < \frac{x+y}{2} < y$.

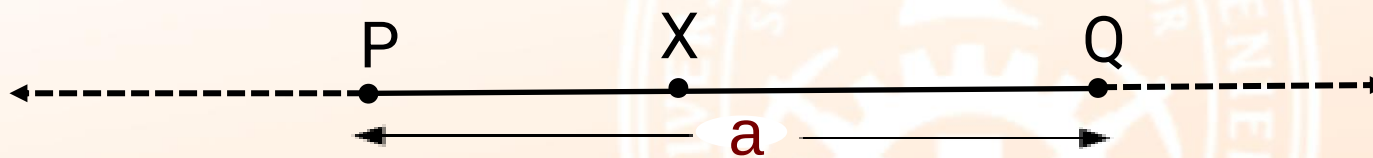


- Si C es el punto cuya coordenada es $\frac{x+y}{2}$. Tenemos que C está entre P y Q.

SEGMENTO

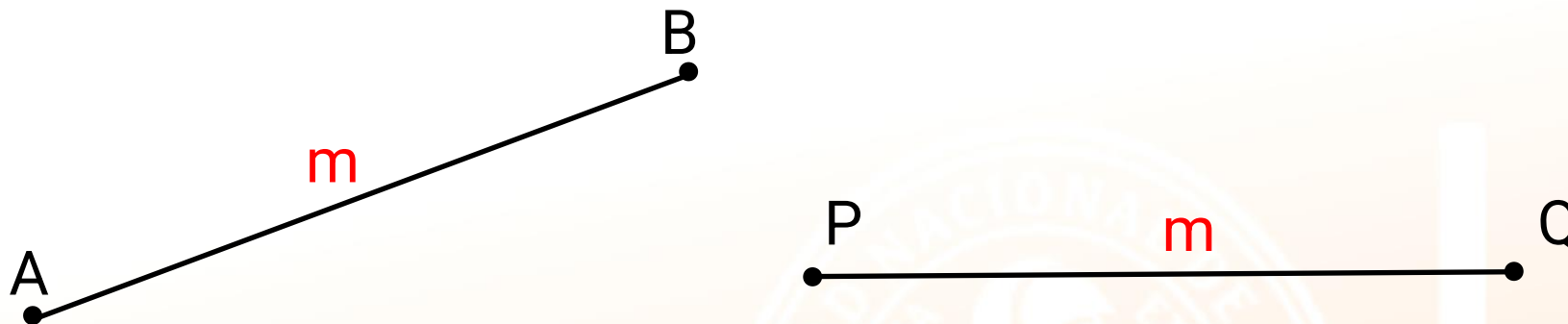
Definición.- Sean P y Q son dos puntos distintos de la recta L. El segmento de extremos P y Q, denotado por $\overline{PQ}$, es el conjunto de los puntos P y Q, y todos los puntos que están entre P y Q. Es decir:

$$\overline{PQ} = \{ P, Q \} \cup \{ X / P - X - Q \}.$$



La longitud del segmento es el número $PQ = a$.

SEGMENTOS CONGRUENTES



Si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ entonces $AB = PQ$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Definición.- Se denomina punto medio de un segmento, al punto del segmento que determina en él dos segmentos congruentes.



M es punto medio del $\overline{AB}$

$$\overline{AM} \cong \overline{MB}$$

Se dice que M, **biseca** al $\overline{AB}$.

RAYO

Definición.- Sean A y B dos puntos de una recta L. El rayo AB, denotado como $\overrightarrow{AB}$, es el conjunto que resulta de la unión del segmento $\overline{AB}$ y de todos los puntos C tales que B está entre A y C.

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C/B \text{ está entre A y C}\}$$



El punto A se denomina origen del rayo AB

Definición.- Si un punto A está entre B y C, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos. La siguiente figura ilustra esta definición.



Definición.- Si a un rayo AB se omite el origen, el conjunto de puntos restantes se denomina semirrecta AB y se denota:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \{A\}$$

EJERCICIO 02

Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

- I. Dados dos puntos arbitrarios, existe una recta y solamente una, que los contiene
- II. La unión de dos segmentos con un extremo en común, es otro segmento.
- III. Alguna unión de dos rayos es una recta.

A) FVF

B) VFV

C) FFF

D) FFV

E) VFF

RESOLUCIÓN 02

Indique el valor de verdad de cada proposición:

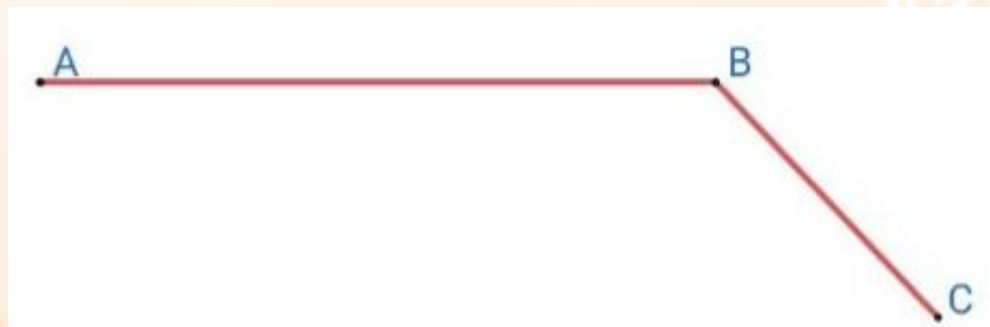
- I. Dados dos puntos arbitrarios, existe una recta y solamente una, que los contiene
- II. La unión de dos segmentos con un extremo en común es otro segmento.
- III. Alguna unión de dos rayos es una recta.

I. **VERDADERA**

Postulado de la recta

II. **FALSA**

No necesariamente



III. **VERDADERA**



Clave: B

EJERCICIO 03

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Si P y Q son dos puntos distintos de la recta L, el segmento de extremos P y Q, **denotado** por $\overline{PQ}$, es el conjunto de los punto P y Q, y todos los puntos que están entre P y Q.
- II. La semirrecta es un rayo sin su punto origen.
- III. A cada par de puntos distintos le corresponde un número positivo único, denominado distancia.

A) FFF

B) FVF

C) VVF

D) VVV

E) VFF

RESOLUCIÓN 03

I. **VERDADERA**

Por definición

II. **VERDADERA**

Por definición

III. **VERDADERA**

Postulado de la distancia

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si P y Q son dos puntos distintos de la recta L, el segmento de extremos P y Q, **denotado** por $\overline{PQ}$, es el conjunto de los punto P y Q, y todos los puntos que están entre P y Q.
- II. La semirrecta es un rayo sin su punto origen.
- III. A cada par de puntos distintos le corresponde un número positivo único, denominado distancia.

Clave: D



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

CONJUNTOS CONVEXOS

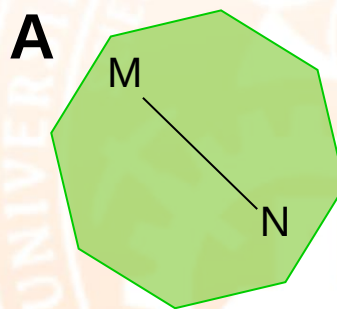
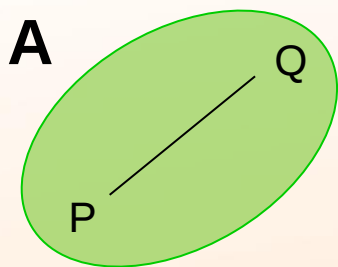
**CICLO
PRE
2024-1**



CONJUNTO CONVEXO

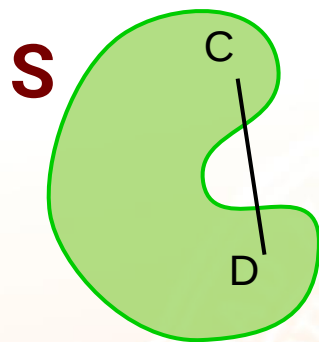
Definición.- Un conjunto **A** de puntos, se denomina conjunto convexo, si todo segmento cuyos extremos son dos puntos cualesquiera de **A**, está contenido en **A**.

A es un conjunto convexo $\Leftrightarrow \forall P ; Q \in A, \overline{PQ} \subset A$



A conjunto convexo

En caso contrario, se denomina **conjunto no convexo**



S conjunto no convexo

NOTA

El conjunto formado por un punto y el conjunto vacío, son conjuntos convexos.

TEOREMA

La intersección de dos conjuntos convexos, es un conjunto convexo.

DEMOSTRACIÓN

Sean A y B conjuntos convexos

- Si $A \cap B$, es el vacío o un punto, entonces $A \cap B$ es conjunto convexo.
- Si $A \cap B$, es más de un punto, entonces sean P y Q dos puntos que pertenecen a $A \cap B$, por definición de conjunto convexo:

$$P ; Q \in A \Rightarrow \overline{PQ} \in A$$

$$P ; Q \in B \Rightarrow \overline{PQ} \in B$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \subset A \cap B$$

Luego, $A \cap B$ es un conjunto convexo.

En ambos casos $A \cap B$ es un conjunto convexo.

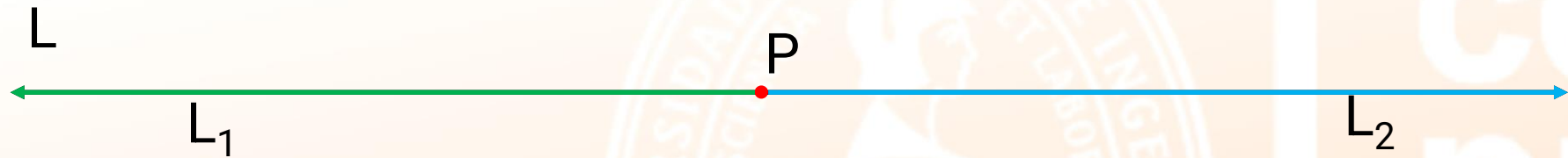
PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Definición.- Se denomina partición de un conjunto A , a cualquier colección de subconjuntos de A , ninguno de los cuales es vacío y tales que cada elemento de A pertenece a sólo uno de estos subconjuntos de A .



EJEMPLO

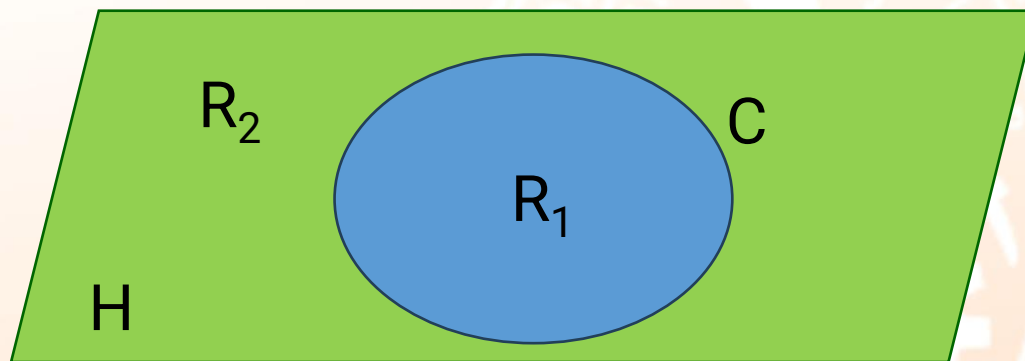
Dado un punto P en una recta, este punto separa a la recta en dos subconjuntos de puntos denominados semirrectas, el punto P no pertenece a ninguna de las semirrectas.



El punto P separa los puntos de la recta L , en dos subconjuntos L_1 y L_2 denominados semirrectas. Una partición resultante de la recta L es $\{L_1; P; L_2\}$

EJEMPLO

Si una circunferencia C está contenida en un plano H , R_1 y R_2 son respectivamente el interior y el exterior de la circunferencia, una partición resultante del plano H es $\{R_1; C; R_2\}$



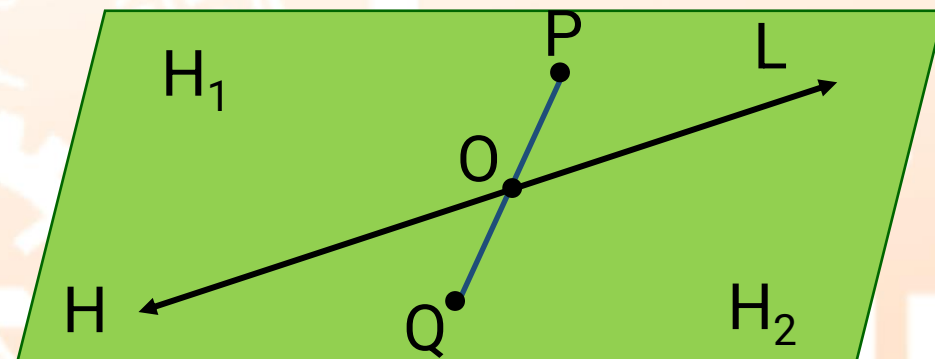
NOTAS

- Una partición de un conjunto es una colección de subconjuntos disjuntos y no vacíos del conjunto, tal que la unión de los subconjuntos sea igual al conjunto.
- La partición de un conjunto no es única.

POSTULADO DE LA SEPARACIÓN DEL PLANO

Si una recta L está contenida en un plano H , entonces los puntos del plano que no pertenecen a la recta constituyen dos conjuntos disjuntos denominados semiplanos H_1 y H_2 tales que:

- H_1 y H_2 son conjuntos convexos.
- Si $P \in H_1$ y $Q \in H_2$, entonces $\overline{PQ} \cap L \neq \emptyset$
- $\{ H_1; L; H_2 \}$ es una partición del plano H



La recta se denomina arista de los dos semiplanos.

EJERCICIO 04

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Todo elemento primitivo es un conjunto convexo.
- II. La semirrecta es un conjunto convexo.
- III. El semiplano es un conjunto convexo.

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FFV

E) FVF

RESOLUCIÓN 04

I. **VERDADERA.**

II. **VERDADERA.**



$$\overrightarrow{OM} - \{O\} = \text{Semirrecta} = \overrightarrow{OM}$$

III. **VERDADERA.**

El semiplano es un conjunto convexo.

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Todo elemento primitivo es un conjunto convexo.
- II. La semirrecta es un conjunto convexo.
- III. El semiplano es un conjunto convexo.

Clave: A

EJERCICIO 05

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Un punto es un conjunto convexo.
- II. Una recta es un conjunto convexo.
- III. La unión de dos conjuntos convexos siempre es un conjunto convexo.

A) FFF

B) FVF

C) VVF

D) VVV

E) VFF

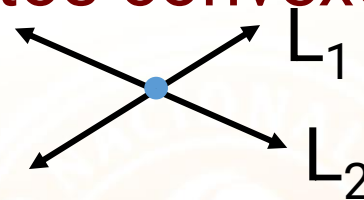
RESOLUCIÓN 05

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Un punto es un conjunto convexo.
- II. Una recta es un conjunto convexo.
- III. La unión de dos conjuntos convexos siempre es un conjunto convexo.

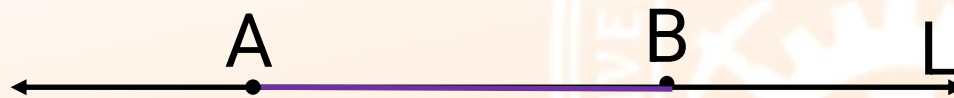
I. VERDADERA.

Las rectas L_1 y L_2 son conjuntos convexos, entonces $L_1 \cap L_2$ es un conjunto convexo.



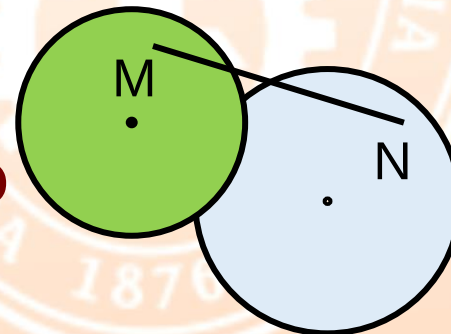
II. VERDADERA.

Sean los puntos A y B disjuntos pertenecientes a la recta, entonces $\overline{AB} \subset \vec{L}$



III. FALSA.

$M \cup N$ es un conjunto no convexo



Clave: C



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI